

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Централна комисия за провеждане на олимпиадата по
АСТРОНОМИЯ

VI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
II кръг

Решения на задачите

Ученици 7 – 8 клас

Задача 1 (10 т.). Вие сте странно извънземно същество, живеещо на бялото джудже – спътник на звездата Сириус (α Голямо куче). Дошли сте на Земята и посещавате Националната астрономическа обсерватория – Рожен. Там ви показват звездна карта. Нарисувайте на картата положението, в което от родното си място виждате Слънцето.

Решение: Сириус е една от най-близките до нас звезди. Следователно, от родното място на сириусианското същество небето няма да изглежда много по-различно от нашето звездно небе. Само положенията на най-близките звезди ще се проектират изместени на фона на останалите далечни звезди. Така че, звездната карта в нашата астрономическа обсерватория ще изглежда доста позната на извънземното. Разбира се, системата от екваториални координати, наложена върху нея, ще е непривична за него, но това няма да го затрудни да покаже къде то вижда Слънцето от своя свят – нали е космически навигатор!

Върху картата е проектирана част от небесната сфера. Намираме скалите за деклинация и ректасцензия, небесния полюс и небесния екватор ($\delta = 0^\circ$). Положението на Слънцето, видимо от Сириус, ще е точка от небесната сфера, диаметрално противоположна на Сириус. Тази точка трябва да се намира на 180° от Сириус по голям кръг от небесната сфера. Единствения голям кръг през Сириус, чиято проекция лесно можем да начертаяме на картата, минава през северния небесен полюс. Това е правата *aa*. Положението на Слънцето трябва да лежи на тази права. Сириус е в южната небесна полусфера – “под” небесния екватор. Диаметрално противоположната му точка е на същото по големина ъглово разстояние от екватора (деклинация), както Сириус, но “над” небесния екватор – в северната небесна полусфера. Виждаме по скалата, че на картата небесните паралели са нанесени през 30° . Поради особеностите на проекцията обаче, на 30° ъглово разстояние

между небесния екватор и паралела с деклинация -30° върху картата отговаря 23.5 mm линейно разстояние, а на същите 30° ъглово разстояние между небесния екватор и паралела с деклинация $+30^\circ$ върху картата отговаря 18.5 mm линейно разстояние. Сириус се намира на разстояние 12.5 mm на юг от небесния екватор, т.е. на малко повече от половината разстояние между екватора и съседния южен паралел. Това означава, че за да има същата по големина, но обратна по знак деклинация, диаметрално противоположната му точка трябва да е на малко повече от половината разстояние от екватора до съседния северен паралел.

По-точни пресмятания показват, че това разстояние е:

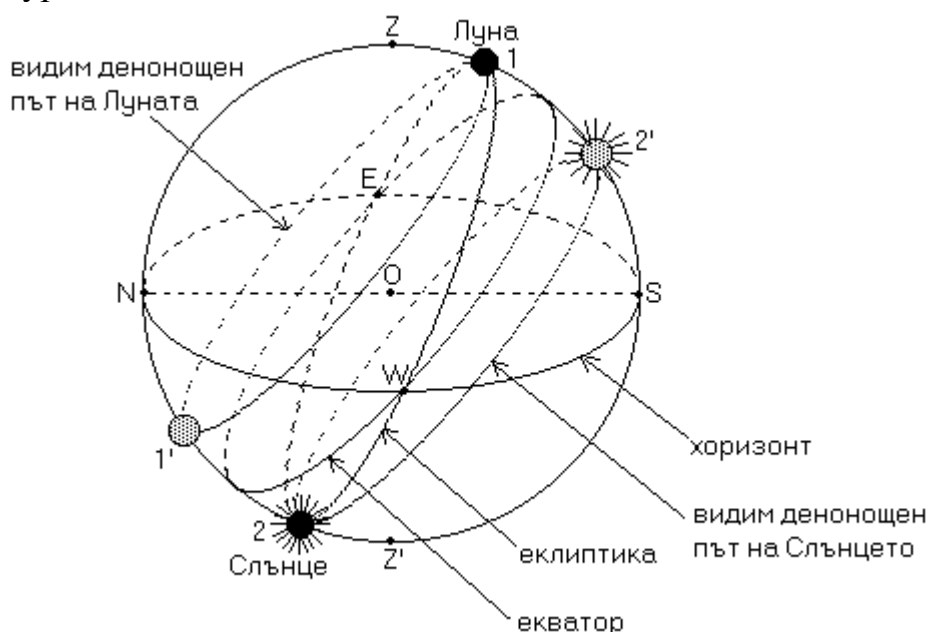
$$12.5 \times 18.5 / 23.5 \approx 10 \text{ mm}$$

на север от небесния екватор.

Съществото ще вижда Слънцето на границата между съзвездията Херкулес и Змиеносец.

Задача 2 (10 т.). Защо в зимните нощи пълната Луна се издига най-високо в небето?

Решение: Най-високо в небето едно небесно тяло се издига, когато е в горна кулминация. За Слънцето това е моментът пладне. През зимата, около зимното слънцестоене, Слънцето се намира в точка от еклиптиката, най-ниско под небесния екватор – положение 2 на фигурата. Затова през зимата, при видимото си денонощно движение по небесната сфера, Слънцето се издига най-ниско над хоризонта по пладне за нашите географски ширини – положение 2' на фигурата.

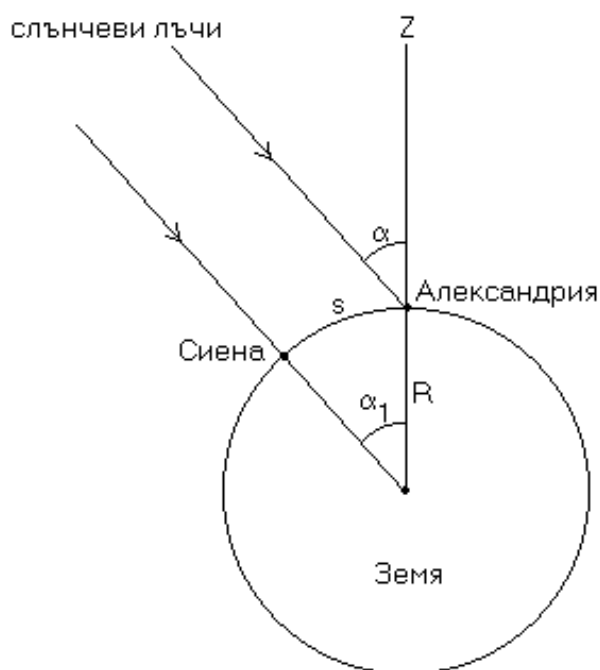


(Трябва да се има предвид, че заедно със Слънцето във видимото денонощно въртене на небесната сфера участва и цялата еклиптика и то така, че ориентацията на нейната равнина се променя, което тук не е отразено, за да не се претрупва чертежът. Слънцето не “напуска” еклиптиката, за да отиде в точка 2’, както могат да се заблудят някои). В пълнолуние Луната се намира на 180° по еклиптиката от Слънцето – положение 1 на фигурата. Следователно тя е на най-голямо разстояние над небесния екватор. Ето защо в горна кулминация – положение 1 – пълната Луна се издига най-високо над хоризонта през зимата.

Задача 3 (10 т.). Ератостен (276 – 194 г. пр.н.е.) е знаменит древногръцки астроном, математик и географ. Той е живял в Египет, в град Александрия. Известно му било, че в друг египетски град, Сиена, Слънцето осветява дъното на дълбоките кладенци по пладне в деня на лятното слънцестоене. В един такъв момент той направил измерване в Александрия и установил, че Слънцето отстои от зенита на $1/50$ част от окръжността. Ератостен знаел също, че Сиена се намира почти точно на юг от Александрия на разстояние около 5000 египетски стадия. Въз основа на тези данни ученият е определил размерите на земното кълбо.

Опитайте се и вие сега да пресметнете радиуса на Земята в египетски стадии.

Решение:



За да осветява дъното на дълбоките кладенци, Слънцето трябва да е практически в зенита за град Сиена. Щом това се случва в деня на лятното слънцестоене, значи Сиена се намира на северната тропична окръжност, но това не е от съществено значение за решаването на тази задача. Нека α е ъгълът, на който Слънцето отстои от зенита в Александрия по пладне в деня на лятното слънцестоене, измерен от

Ератостен, а α_1 е ъгълът между направленията от центъра на Земята към Александрия и към Сиена. Слънцето е на далечно разстояние, така че можем да считаме слънчевите лъчи, попадащи в един и същ момент в Сиена и Александрия, за успоредни помежду си. Следователно:

$$\alpha = \alpha_1 = (1 / 50) \times 2\pi$$

Разстоянието между двата града – 5000 египетски стадия – е равно на дължината на дъгата s . Ако R е радиусът на Земята, то:

$$s = \alpha R$$

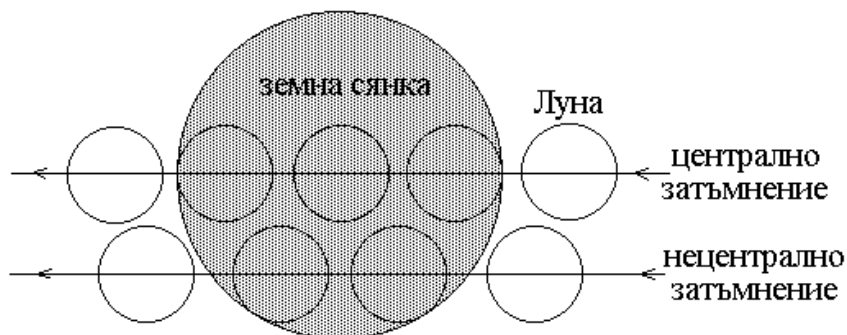
Оттук за радиуса на Земята намираме:

$$R = s / \alpha$$

$$R = 5000 \times 50 / 2\pi \approx 39\,800 \text{ египетски стадия.}$$

Задача 4 (10 т.). При какви условия продължителността на едно пълно лунно затъмнение ще е най-голяма? Обяснете вашия отговор.

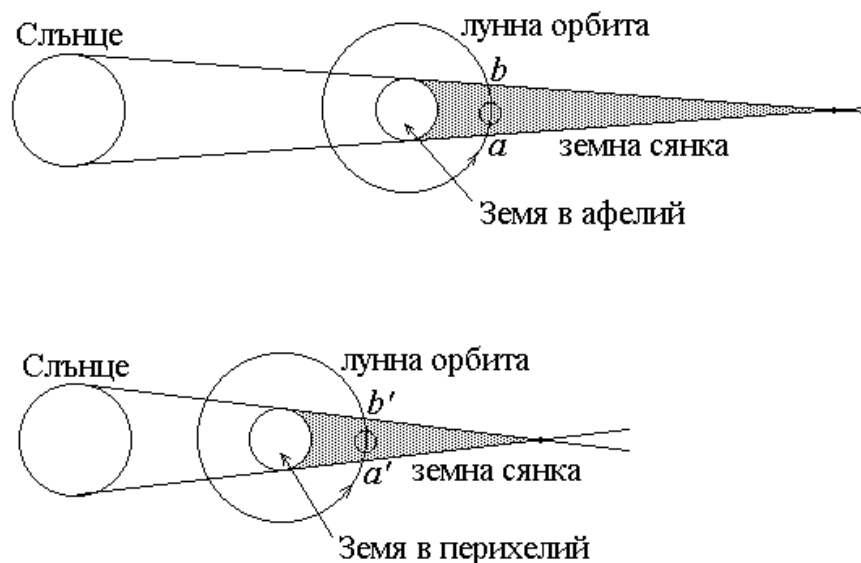
Решение: За да има максимална продължителност, на първо място лунното затъмнение трябва да е централно, т.е. Луната да минава през центъра на земната сянка. Тогава пътят на Луната през сянката ще е най-дълъг (Фиг. 1).



Фиг. 1

Колкото по-голям е диаметърът на земната сянка, толкова по-дълго ще е пълното лунно затъмнение. Тъй като Слънцето е с по-голям размер от Земята, земната сянка е разположена в един конус зад Земята, който се стеснява с отдалечаване от нашата планета. Когато Земята е по-далеч от Слънцето, конусът на земната сянка е с по-остър ъгъл при своя връх и следователно диаметърът на земната сянка намалява по-бавно с отдалечаването от Земята. На разстоянието до Луната ще се получи най-голям диаметър на сянката, когато Земята е в афелий. На Фиг. 2 се вижда, че тогава пътят ab на Луната през сянката е по-дълъг, отколкото пътя $a'b'$,

когато Земята е в перихелий. Следователно, когато Земята е в афелий, ще има и по-продължително лунно затъмнение.



Фиг. 2

Друг фактор е скоростта, с която Луната минава през земната сянка. Най-бавно Луната се движи по своята орбита, когато е в апогей. Наистина, тогава Луната прекосява земната сянка на по-далечно разстояние от Земята, а с отдалечаване от Земята сянката на нашата планета се стеснява. Но влиянието, което това стесняване на земната сянка оказва върху продължителността на лунното затъмнение, е по-малко, отколкото забавеното движение на Луната. Затова, когато Луната е около апогей, лунното затъмнение ще е по-дълго.

Задача 5 (15 т.). Изкуствен спътник на Земята се движи по кръгова екваториална орбита на височина 1000 km над земната повърхност в посока от запад на изток. Друг спътник се движи също по кръгова екваториална орбита, но на височина 500 km и в обратната посока. В даден момент за наблюдател в една точка от земната повърхност двата спътника са едновременно в зенита.

- След какъв най-кратък интервал от време двата спътника отново ще са едновременно в зенита за някоя точка от земната повърхност?
- В каква посока и на какво разстояние ще е втората точка от първата?

Решение: Нека $h_1 = 1000$ km и $h_2 = 500$ km са височините на двата спътника над Земята повърхност, T_1 и T_2 са техните

орбитални периоди, $R_3 = 6378 \text{ km}$ и $M_3 = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ са радиусът и масата на Земята, а $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ е гравитационната константа. От III закон на Кеплер получаваме:

$$T_1 = 2\pi ((R_3 + h_1)^3 / \gamma M_3)^{1/2} \approx 6250 \text{ s} \quad (1)$$

$$T_2 = 2\pi ((R_3 + h_2)^3 / \gamma M_3)^{1/2} \approx 5620 \text{ s} \quad (2)$$

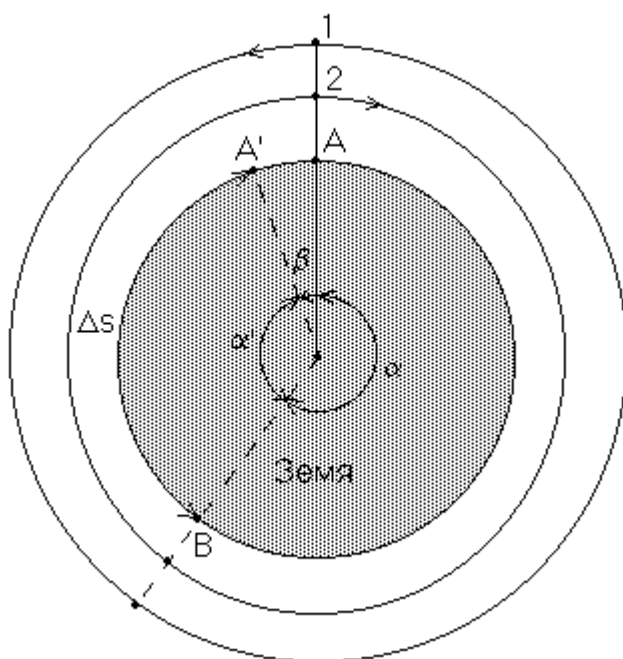
Щом и двата спътника са в зенита за даден земен наблюдател в някакъв момент, те лежат на една права линия с този наблюдател и с центъра на Земята. Можем да кажем, че първият спътник е в “опозиция” по отношение на втория, или пък, че вторият е в “долно съединение” относно първия, подобно на планетните конфигурации. За интервала от време T , след който спътниците отново ще са в зенита за някоя точка от земната повърхност, е валидно съотношението:

$$1 / T = 1 / T_1 + 1 / T_2 \quad (3)$$

Знакът “+” в тази формула е заради това, че спътниците обикалят около Земята в две противоположни посоки. Величините $1 / T_1$, $1 / T_2$ и $1 / T$ са пропорционални съответно на ъгловите скорости на движение на първия и втория спътник около Земята и на ъгловата скорост на единия спътник относно другия. Тъй като спътниците се движат в противоположни посоки, за да се получи относителната ъглова скорост на единия спрямо другия, “абсолютните” ъглови скорости трябва да се съберат. И така от (1), (2) и (3) за T получаваме:

$$T = T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$$

$$T \approx 2960 \text{ s} \approx 49 \text{ min}$$



Нека в първия момент спътниците да са в зенита за наблюдател в точка А от земната повърхност. Тъй като първият спътник, който е на по-високата орбита, се движи по-бавно, спътниците отново ще се “срещнат” в зенита за точка В от земната повърхност, която е на изток от А. Освен това, дотогава точката А ще се е завъртяла до положение А’, поради

околоосното въртене на Земята. Разстоянието между двата пункта, от които спътниците са били наблюдавани в зенита, е дъгата Δs между точките А' и В. Намираме ъгъла α , който е изминал по орбитата си вторият спътник:

$$\alpha = (2\pi / T_2) T$$

Ъгълът, на който Земята се е завъртяла за време T , е:

$$\beta = (2\pi / T_3) T$$

където $T_3 = 23^h 56^m$ е продължителността на звездното денонощие. Търсеното разстояние е:

$$\Delta s = R_3 \alpha' = R_3 (2\pi - \alpha - \beta)$$

$$\Delta s = 2\pi R_3 T (1 / T - 1 / T_2 - 1 / T_3)$$

където $R_3 = 6378 \text{ km}$ е радиусът на Земята.

$$\Delta s \approx 17\,600 \text{ km}$$

Ученици 9 – 10 клас

Задача 1 (10 т.). Същата като задача 1 за 7 – 8 клас.

Задача 2 (10 т.). Да си представим, че в Айфеловата кула в Париж са монтирани две вертикални кръгли стъклени тръби с диаметър 1 m, от които е изтеглен въздухът. В центъра на горната основа на едната тръба е закрепено перце, а в центъра на горната основа на другата – златно яйце. В един и същи момент двете тела се пускат да падат свободно в тръбите без начална скорост.

- Колко време ще пада перцето? А яйцето?
- Пресметнете в кои точки от долните основи на тръбите ще паднат перцето и яйцето.

Географската ширина на Париж е $\varphi \approx 45^\circ$, а височината на Айфеловата кула е 300 m.

Решение: Тъй като въздухът от тръбите е изтеглен и не оказва съпротивление на двете тела, то перцето и яйцето ще падат в продължение на едно и също време t , защото се движат с едно и също ускорение g . Височината на Айфеловата кула е $H = 300 \text{ m}$.

$$H = gt^2 / 2$$

$$t = (2H / g)^{1/2}$$

$$t \approx 7.82 \text{ s}$$

При околоосното въртене на Земята, линейната скорост, с която се движи точка от земната повърхност на географска ширина 45° , е:

$$v = 2\pi R_3 / (2)^{1/2} T_3$$

където $R_3 = 6378 \text{ km}$ е радиусът на Земята, а $T_3 = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}$ е продължителността на звездното денонощие. Това е скоростта на точките от долните основи на двете тръби. Точките от горните им основи са по-далеч от оста на Земята и линейната им скорост е по-голяма:

$$v_I = 2\pi (R_3 + H) / (2)^{1/2} T_3$$

Затова, когато пуснем перцето и яйцето, те няма да падат отвесно надолу, а ще се отклонят по посока на въртенето на Земята, т.е. ще паднат с изместване на изток от центровете на долните основи на тръбите. В началния момент на падането всяко от двете тела ще има относителна хоризонтална скорост спрямо земната повърхност:

$$v' = v_I - v = 2\pi H / (2)^{1/2} T_3$$

$$v' \approx 1.55 \text{ cm/s}$$

Движейки се по инерция, те ще запазят постоянна тази хоризонтална компонента на скоростта през цялото време на падане. Следователно всяко от двете тела ще падне на разстояние x източно от центъра на долната основа на своята кула, което можем да пресметнем по формулата:

$$x = v' t$$

$$x \approx 12 \text{ cm}$$

Задача 3 (10 т.). Същата като задача 3 за 7 – 8 клас.

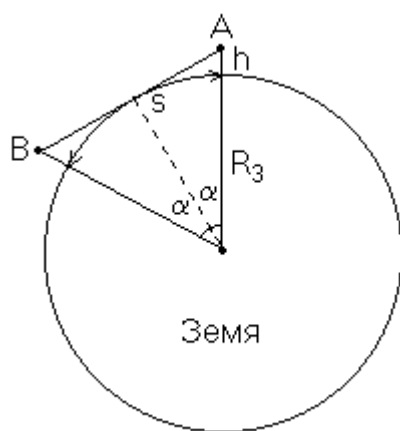
Задача 4 (10 т.). Същата като задача 4 за 7 – 8 клас.

Задача 5 (10 т.). Същата като задача 5 за 7 – 8 клас.

Ученици 11 – 12 клас

Задача 1 (10 т.). Височината на един жираф е 5.50 m. Какъв е най-малкият брой жирафи, които трябва да се наредят по екватора на Земята, така че всеки жираф да вижда двата си съседни жирафа? Смятаме, че през планините и горите са направени специални тунели и просеки за жирафите, а в моретата и океаните са построени понтонни мостове. През нощта жирафите са добре осветени.

Решение:



Ще решаваме задачата, без да отчитаме влиянието на земната атмосфера върху видимостта на жирафите. За да може жирафът А да вижда над хоризонта поне главата на съседния си жираф В, те трябва да са разположени така, че отсечката АВ, съединяваща главите им, да е допирателна към земната повърхност.

За ъгъла α получаваме:

$$\cos \alpha = R_3 / (R_3 + h)$$

където $R_3 = 6378$ km е радиусът на Земята, а $h = 5.5$ m е височината на жирафа.

$$\alpha \approx 0^\circ.0752$$

Разстоянието по земната повърхност между двата жирафа е равно на дължината на дъгата s .

$$s = 2R_3 \alpha$$

където стойността на α е превърната в радиани.

$$s \approx 16,75 \text{ km}$$

Най-малкия брой жирафи, които можем да разположим по екватора, така че всеки да вижда двата си съседни жирафа, е:

$$N = 2\pi R_3 / s$$

(Предполагаме, че жирафите имат достатъчно остро зрение). Като заместим числените стойности в последната формула, получаваме приблизително числото 2392,19. Но тъй като броят на жирафите трябва да е цяло число, търсеният най-малък брой жирафи е:

$$N = 2393$$

Същият резултат се получава и когато направо разделим 2π на ъгъла 2α , без да изчисляваме линейното разстояние по земната повърхност между жирафите.

Задача 2 (10 т.). Да си представим, че в Айфеловата кула в Париж са монтирани две вертикални кръгли стъклени тръби с диаметър 1 m, от които е изтеглен въздухът. В центъра на горната основа на едната тръба е закрепено перце, а в центъра на горната основа на другата – златно яйце. В един и същи момент двете тела се пускат да падат свободно в тръбите без начална скорост.

- Колко време ще пада перцето? А яйцето?
- Пресметнете в кои точки от долните основи на тръбите ще паднат перцето и яйцето.

Географската ширина на Париж е $\varphi = 48.8^\circ$, а височината на Айфеловата кула е 300 m.

Решение: Тъй като въздухът от тръбите е изтеглен и не оказва съпротивление на двете тела, то перцето и яйцето ще падат в продължение на едно и също време t , защото се движат с едно и също ускорение g . Височината на Айфеловата кула е $H = 300$ m.

$$H = gt^2 / 2$$

$$t = (2H / g)$$

$$t \approx 7.8 \text{ s}$$

При околоосното въртене на Земята, линейната скорост, с която се движи точка от земната повърхност на географска ширина φ , е:

$$v = 2\pi R_3 \cos \varphi / T_3$$

където $R_3 = 6378$ km е радиусът на Земята, а $T_3 = 23^h56^m$ е продължителността на звездното денонощие. Това е скоростта на точките от долните основи на двете тръби. Точките от горните им основи са по-далеч от оста на Земята и линейната им скорост е по-голяма:

$$v_l = 2\pi (R_3 + H) \cos \varphi / T_3$$

Затова, когато пуснем перцето и яйцето, те няма да падат отвесно надолу, а ще се отклонят по посока на въртенето на Земята, т.е. ще паднат с изместване на изток от центровете на долните основи на тръбите. В началния момент на падането всяко от двете тела ще има относителна хоризонтална скорост спрямо земната повърхност:

$$v' = v_l - v = 2\pi H \cos \varphi / T_3$$

$$v' \approx 1.44 \text{ cm/s}$$

Движейки се по инерция, те ще запазят постоянна тази хоризонтална компонента на скоростта през цялото време на падане. Следователно всяко от двете тела ще падне на разстояние x източно от центъра на

долната основа на своята кула, което можем да пресметнем по формулата:

$$x = v' t$$

$$x \approx 11 \text{ cm}$$

Задача 3 (15 т.). Въз основа на фотометрични наблюдения, направени с точност до 0.005^m , е открита планета около друга звезда. Откритието е станало благодарение на регистрираните преминавания на планетата по диска на звездата. При тях звездната величина на звездата се е увеличавала с 0.02^m за период от 5 часа. Ще бъде ли възможно да се открие спътникът на тази планета, който е 3 пъти по-малък от нея по диаметър и се движи по орбита с радиус 20 пъти по-голям от радиуса на планетата? Орбитата на спътника около планетата и на планетата около звездата са в една равнина.

Решение: Нека R , R_{Π} и $R_C = R_{\Pi} / 3$ са съответно радиусите на звездата, планетата и спътника. Звездата създава на Земята осветеност E , когато няма пасаж на планетата по нейния диск, и E_{Π} , когато планетата преминава по диска на звездата. Можем приближено да разглеждаме звездата като излъчващ диск с радиус R , а планетата като тъмен диск с радиус R_{Π} . Площите на тези дискове са съответно:

$$S = \pi R^2$$

$$S_{\Pi} = \pi R_{\Pi}^2$$

Отношението на двете осветености е:

$$E / E_{\Pi} = S / (S - S_{\Pi}) = R^2 / (R^2 - R_{\Pi}^2) \quad (1)$$

Съгласно формулата на Погсън:

$$E / E_{\Pi} = 2.512^{\Delta m} \quad (2)$$

където $\Delta m = 0^m.02$ е увеличението на звездната величина на звездата, което се наблюдава при пасаж на планетата по нейния диск. От (1) и (2) получаваме:

$$R_{\Pi} = R (1 - 1 / 2.512^{\Delta m})^{1/2} \approx 0.135 R \quad (3)$$

$$R_C = R_{\Pi} / 3 \approx 0.045 R \quad (4)$$

Когато на фона на звездата се проектира само спътникът, звездата ще създава осветеност E_C . За нея е в сила съотношението:

$$E / E_C = R^2 / (R^2 - R_C^2)$$

Използваме формулата на Погсън в логаритмичен вид:

$$\lg (E / E_C) = \lg (R^2 / (R^2 - R_C^2)) = 0.4 \Delta m_I$$

където Δm_I е увеличението на звездната величина на звездата, когато на фона на нейния диск е само спътникът.

$$\Delta m_I = 2.5 \lg (R^2 / (R^2 - R_C^2))$$

$$\Delta m_I \approx 0^m.0022$$

Но точността на фотометричните наблюдения е до $0^m.005$. Тъй като Δm_I е по-малко от тази стойност, то увеличението на звездната величина не може да се регистрира чрез фотометрични наблюдения и спътникът не може да се открие.

Все пак, дали той не може да бъде открит по друг начин? Да предположим, че плътностите на спътника и на планетата са приблизително еднакви. Тогава масите на планетата и на спътника ще се отнасят както обемите им. Обемът на кълбо с радиус R е:

$$V = 4\pi R^3 / 3$$

Щом $R_C = R_{II} / 3$, то масите на планетата и спътника M_{II} и M_C ще са в съотношение $3^3 : 1 = 27 : 1$. Разстоянието между спътника и планетата е $20 R_{II}$. Можем да намерим на какво разстояние от центъра на планетата е центърът на масите на системата спътник-планета. За разстоянията на спътника до центъра на масите r_C и на планетата до центъра на масите r_{II} важат съотношенията:

$$r_C / r_{II} = M_{II} / M_C = 27$$

$$r_C + r_{II} = 20 R_{II}$$

Оттук получаваме:

$$r_{II} = 20 R_{II} / 28$$

$$r_{II} \approx 0.71 R_{II}$$

Това означава, че със своето гравитационно поле спътникът причинява значителни периодични отклонения в движението на планетата по нейната орбита около звездата и те могат да бъдат открити по разликите в продължителността на пасажите на планетата, наблюдавани в различни времена.

Задача 4 (10 т.). Същата като задача 4 за 7 – 8 клас.

Задача 5 (10 т.). Същата като задача 5 за 7 – 8 клас.